<u>Θεώρημα</u> Δύο Ευκλείδειοι χώροι $(E,<,>)$ και $(F,<,>)$ πεπερασμένης διάστασης είναι ισομετρικά ισόμορφοι $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}E = \dim_{\mathbb{R}}F$

<u>Απόδειξη</u>: "$\Rightarrow$" Αν οι E,F είναι ισομετρικά ισόμορφοι, τότε οι E,F είναι ισόμορφοι και άρα: $\dim_{\mathbb{R}}E = \dim_{\mathbb{R}}F$

"$\Leftarrow$" Έστω $\dim_{\mathbb{R}}E = \dim_{\mathbb{R}}F = n < \infty$. Έστω $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ ΟΚΒ του E και $\mathcal{E} = \{\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}\}$ ΟΚΒ του F. Από το θεώρημα γραμμικής επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε: $f(\vec{e_i}) = \vec{\varepsilon_i}$, $1 \le i \le n$

<u>Υπενθύμιση</u>: $\forall \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n} \in E$, $f(\vec{x}) = x_1\vec{\varepsilon_1} + \dots + x_n\vec{\varepsilon_n}$

Επειδή η f στέλνει τη βάση β στη βάση $\mathcal{E}$ έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός.

$<f(\vec{e_i}), f(\vec{e_j})> = <\vec{\varepsilon_i}, \vec{\varepsilon_j}> = \delta_{ij}$, $1 \le i,j \le n \Rightarrow$ η f στέλνει ΟΚΒ σε ορθοκανονικά σύνολα και άρα η f: ισομετρία. Επειδή η f ως ισομορφισμός είναι επί, έπεται ότι οι E και F είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

<u>Πόρισμα</u>: Αν $(E,<,>)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος με $\dim_{\mathbb{R}}E = n$, τότε οι χώροι $(E,<,>)$ και $(\mathbb{R}^n,<,>)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι

<u>Πχ</u> Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}_2[t],<,>)$, όπου: $<P(t),Q(t)> = \int_0^1 P(t)\cdot Q(t)\,dt$. Τότε υπάρχει μια ισομετρία $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$

Έστω $\beta = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$: κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{E} = \{\underset{\vec{\varepsilon_1}}{1}, \underset{\vec{\varepsilon_2}}{\sqrt{12}\left(t-\frac{1}{2}\right)}, \underset{\vec{\varepsilon_3}}{\sqrt{180}\left(t^2-t-\frac{1}{6}\right)}\}$ ΟΚΒ του $\mathbb{R}_2[t]$

Σύμφωνα με το θεώρημα, η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$

$f(x,y,z) = x\cdot 1 + y\sqrt{12}\left(t-\frac{1}{2}\right) + z\sqrt{180}\left(t^2-t-\frac{1}{6}\right)$ είναι ισομετρία.

- Είναι οι χώροι $\mathbb{R}^6$ και $M_3(\mathbb{R})$ ισομετρικά ισόμορφα?

Είναι και οι δύο Ευκλείδειοι, αλλά ο ένας έχει διάσταση 6 και ο άλλος 9. Άρα δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι

- Είναι οι χώροι $\mathbb{R}^4$ και $M_2(\mathbb{R})$ ισομετρικά ισόμορφοι?

$\langle A,B\rangle = Tr(A^t B)$

Είναι ισομετρικά ισόμορφοι, διότι $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 = \dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}) = 4$

$\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$

$\vec{e_i} = (0, \dots, \overset{i\text{-θέση}}{1}, \dots, 0)$, $1 \le i \le n$

$e = \{\vec{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ ΟΚΒ του $M_2(\mathbb{R})$

$f: \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$, $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = f(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3} + \delta\vec{e_4}) =$

$= \alpha\vec{E_1} + \beta\vec{E_2} + \gamma\vec{E_3} + \delta\vec{E_4} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι ισομετρία.

Ιδιοτιμές Μιας Ισομετρίας

Έστω $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, $\dim_{\mathbb{R}} E = n$ και έστω $f: E \to E$ μια ισομετρία.

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του f. Τότε $\exists \vec{x} \in E, \vec{x} \ne \vec{0} : f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Τότε $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ και $\|f(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\| \Rightarrow \left.\begin{matrix} |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \\ \|\vec{x}\| \ne 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$

Πρόταση: Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια ιδιοτιμή μιας ισομετρίας $f: E \to E$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$. Τότε $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Πχ || Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-y,x)$

Τότε, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|f(x,y)\| = \|(-y,x)\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

Άρα f: ισομετρία

$\beta = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$, $f(\vec{e_1}) = f(1,0) = (0,1)$

$f(\vec{e_2}) = f(0,1) = (-1,0)$

Άρα $A = M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \Rightarrow$ ο f δεν έχει (πραγματικές) ιδιοτιμές.

Άσκηση: Έστω $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = x + z\} = \{(x, x+z, z) \in \mathbb{R}^3 / x, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,1,0) + z(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 / x, z \in \mathbb{R}\}$

Το σύνολο $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του V και εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο αυτό είναι μια βάση του V. Άρα $\dim V = 2$. Τότε υπάρχει μια ισομετρία $f: V \to \mathbb{R}^2$ ή ισοδύναμα μια ισομετρία $f: \mathbb{R}^2 \to V$

Η βάση $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ του V δεν είναι ορθοκανονική, διότι:

$\langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle = 1 \neq 0$

Διαδικασία Gram-Schmidt: $\vec{y_1} = (1,1,0)$

$\vec{y_2} = (0,1,1) - \dfrac{\langle (0,1,1),(1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle}(1,1,0) =$

$= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (0,1,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

Άρα θέτοντας $\vec{\varepsilon_1} = \dfrac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$\vec{\varepsilon_2} = \dfrac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \vec{\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$ είναι ΟΚΒ του V.

Ορίζουμε απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to V$, $f(x,y) = f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) =$

$= x\vec{\varepsilon_1} + y\vec{\varepsilon_2} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + y\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) =$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} y, \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

Σχέση Ισομετριών και Ορθογώνιων Πινάκων

Έστω $(E, <,>)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\dim_{\mathbb{R}} E = n$. Έστω ότι $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ΟΚΒ του E και $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E. Θα εξετάσουμε πότε ο f είναι ισομετρία.

$\forall i = 1, \dots, n : f(\vec{e}_i) = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda i} \vec{e}_\lambda$ Τότε $M_\beta^\beta(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Παρόμοια: $f(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e}_k$

$$< f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) > = < \sum_{i=1}^{n} a_{\lambda i} \vec{e}_\lambda, \sum_{i=1}^{n} a_{kj} \vec{e}_k > = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{\lambda i} a_{kj} \underbrace{< \vec{e}_\lambda, \vec{e}_k >}_{\delta_{\lambda k}} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{\lambda i} a_{kj} \delta_{\lambda k} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$ Άρα: $\forall i, j = 1, \dots, n$:

$$\boxed{< f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) > = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}}$$

f: ισομετρία $\Leftrightarrow$ ο f στέλνει ΟΚΒ του E σε ΟΚΒ του E $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow < f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) > = \delta_{ij}, \forall 1 \le i, j \le n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i, j = 1, 2, \dots, n$: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & a_{nj} & & a_{nn} \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & & \dots & \end{pmatrix} = A \\ \quad \text{i-στήλη} \quad \text{j-στήλη} \end{array}$$

Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n \right\}$ με

εσωτερικό γινόμενο $< \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

Τότε οι στήλες του πίνακα A: $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \Sigma_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ (5)

αποτελούν ΟΚΒ του $\mathbb{R}_n$, δλδ $\langle \Sigma_i, \Sigma_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i,j = 1,\ldots,n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \forall i,j = 1,\ldots,n \Leftrightarrow f$: ισομετρία.

$\Leftrightarrow \forall i,j = 1,\ldots,n : \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

① Άρα: f είναι ισομετρία $\Leftrightarrow$ οι στήλες του πίνακα του f σε μια ΟΚΒ του E είναι ΟΚΒ του χώρου των στηλών $\mathbb{R}_n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik} (A)_{kj} = ({}^tA \cdot A)_{ij}$$

Άρα $\forall i,j = 1,\ldots,n : \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \forall i,j = 1,\ldots,n : ({}^tAA)_{ij} = (I_n)_{ij}$

$\Leftrightarrow {}^tAA = I_n$

② Άρα: ο f είναι ισομετρία $\Leftrightarrow$ ο πίνακας A του f σε μια ΟΚΒ του E ικανοποιεί τη σχέση ${}^tAA = I_n$

Ορισμός: Ένας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται ορθογώνιος $\Leftrightarrow {}^tAA = I_n$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας ορθογώνιος πίνακας, τότε ${}^tAA = I_n$ και:

$1 = |I_n| = |{}^tAA| = |{}^tA| \cdot |A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm 1$

Άρα: $\boxed{A: \text{ορθογώνιος} \Rightarrow |A| = \pm 1}$

Ιδιαίτερα: A: ορθογώνιος $\Rightarrow$ ο A: αντιστρέψιμος και: $\boxed{A^{-1} = {}^tA}$

Άρα αν ο A είναι ορθογώνιος, τότε $A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \boxed{AA^t = I_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i,j = 1,\ldots,n : (A \cdot {}^tA)_{ij} = (I_n)_{ij} \Leftrightarrow \forall i,j = 1,\ldots,n :$

$\sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot ({}^tA)_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \forall i,j = 1,\ldots,n : \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \Leftrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \Gamma_1 \\ \vdots \\ \to \Gamma_i \\ \vdots \\ \to \Gamma_j \\ \vdots \\ \to \Gamma_n \end{array}$$

$\Leftrightarrow$ οι γραμμές $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ του A αποτελούν ΟΚΒ του $\mathbb{R}^n$

Άρα: A ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ ${}^tAA = I_n \Leftrightarrow A{}^tA = I_n \Leftrightarrow$ ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = {}^tA \Leftrightarrow$ οι στήλες του A είναι ΟΚΒ του $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ οι γραμμές του A είναι ΟΚΒ του $\mathbb{R}^n$. (*)

Συνοψίζουμε: ο ενδομορφισμός $f: E \to E$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, είναι ορθογώνιος ισομετρία $\Leftrightarrow$ ο $M^{\beta}_{\beta}(f) = A$, όπου β: ΟΚΒ του E, είναι ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ ισχύουν για τον A οι ιδιότητες (*).

Παρατήρηση: ① A: ορθογώνιος $\Rightarrow A^{-1}$: ορθογώνιος

Πράγματι, τότε $A^{-1} = {}^tA$ και τότε: ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA){}^tA = A{}^tA = I_n$

$\Rightarrow A^{-1}$: ορθογώνιος.

② I_n: ορθογώνιος (προφανές)

③ A, B: ορθογώνιοι $\Rightarrow A \cdot B$: ορθογώνιος.

Πράγματι, ${}^t(AB)\cdot(AB) = {}^tB\,\underline{{}^tA \cdot A}B = {}^tB I_n B = {}^tBB = I_n$

Άρα AB: ορθογώνιος

$\boxed{\text{Πχ}}$ ① $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$\Gamma_1: \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$

Παρόμοια: η Γ_2 και η Γ_3 είναι μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\rangle = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0$

$$\langle r_1, r_3\rangle = \left\langle \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right\rangle = \tfrac{2}{9} - \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{9} = 0$$

$$\langle r_2, r_3\rangle = \left\langle \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{-2}{3}\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right\rangle = \tfrac{4}{9} - \tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{9} = 0 \quad \Rightarrow$$

και $\|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1$

$\Rightarrow$ οι γραμμές του A είναι ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ A: ορθογώνιος.

(9) Έστω ο πίνακας A: $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ → Αν η πρώτη γραμμή δεν είχε μήκος 1, ο πίνακας δε μπορεί να συμπληρωθεί

Να συμπληρωθεί ο πίνακας έτσι ώστε αυτός να είναι ορθογώνιος.

Έστω ότι $r_2 = (x, y, z)$ και θέλουμε $\langle r_1, r_2\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right), (x, y, z)\right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow x = -2y - 2z$

Για $y = z = 1$ προκύπτει η γραμμή: $(-4, 1, 1)$ και τότε

$\left(\frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ Άρα $\boxed{r_2 = \left(\frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)}$

Έστω ότι $r_3' = (x, y, z)$ και θέλουμε $\langle r_1, r_3\rangle = 0 = \langle r_2, r_3\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} = 0$ και $\frac{-4x}{\sqrt{18}} + \frac{y}{\sqrt{18}} + \frac{z}{\sqrt{18}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_3' = (0, 1, -1)$

$\boxed{r_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}$